МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ РЯЗАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ОБЛАСТНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«РЯЗАНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

Цикловая методическая комиссия
математических дисциплин и информатики

Н.А. Ивина

Теория пределов

Учебное пособие

для специальностей

среднего профессионального образования

Рязань 2019 г.

СОГЛАСОВАНО

цикловой методической комиссией

математических дисциплин и информатики

Председатель цикловой комиссии

_____Н.А. Ивина

«____»_____ 2019 г.

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора по учебной работе

_____Н.В. Чекурова

«____»_____2019 г.

Составители:

Ивина Н.А., преподаватель высшей квалификационной категории ОГБПОУ «Рязанский технологический колледж»;

Рецензенты:

Щенева Ю.Б., магистр математики, преподаватель высшей квалификационной категории ОГБПОУ «Рязанский технологический колледж»

С.А. Бубнов – к.ф-м.н., доцент кафедры ВПМ РГРТУ

Технический исполнитель:

Саидова Н.А.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Понятие функции и основные свойства функций	5
2. Последовательность и ее предел	11
3. Предел функции	15
4. Замечательные пределы	22
5. Непрерывность функции, точки разрыва	28
Список используемой литературы	32

ВВЕДЕНИЕ

В данном пособии изложены краткие теоретические сведения, приведены примеры решения типовых задач, даны упражнения для самостоятельной работы. Все задания снабжены ответами. Приведенные ответы (решения) помогут обучающимся в освоении учебного материала.

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

Функции

Понятие функции является одним из основных в курсе высшей математики. Введению этого понятия в математику способствовало то, что некоторые явления в жизни взаимосвязаны и зависимы друг от друга.

Пусть заданы непустые множества X и Y действительных чисел ($X \subset R$, $Y \subset R$).

Если каждому значению переменной x из множества X соответствует одно определенное значение переменной y из множества Y, то это соответствие называется функцией и записывается $y = f(x)$.

Множество X называется областью определения функции или областью допустимых значений (ОДЗ), обозначается $D(y)$.

Множество Y называется множеством значений функции, обозначается $E(y)$.

Переменная x называется аргументом или независимой переменной, y называется функцией или зависимой переменной.

Пример 1. Найти для функции $f(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{3}{x-5}$ область определения.

Решение. Представим исходную функцию $f(x)$ в виде суммы двух функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sqrt{x-3} + \frac{3}{x-5}.$$

Тогда область определения $D(f_1)$ функции $f_1(x)$ задается неравенством $x-3 \geq 0$, откуда $x \geq 3$. Итак, область определения $D(f_1)$ функции $f_1(x)$ есть множество $D(f_1) = [3, +\infty)$.

Область определения $D(f_2)$ второй функции есть множество всех действительных чисел, кроме $x = 5$ (при $x = 5$ знаменатель дроби $\dfrac{3}{x-5}$ обращается в нуль): $D(f_2) = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$.

Область определения $D(f)$ исходной функции есть пересечение двух множеств $D(f_1)$ и $D(f_2)$:

$$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) = (3, 5) \cup (5, +\infty).$$

Ответ: $D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) = (3, 5) \cup (5, +\infty)$

Способы задания функций

1) Аналитический способ, если функция задана формулой вида $y = f(x)$. Например, $y = x^3 + 1$ или $y = \begin{cases} x^2, \text{если } x < 0 \\ x - 1, \text{если } x \geq 0 \end{cases}$.

Если функция задана аналитически формулой $y = f(x)$ и не указана область определения $D(y)$, то под областью определения функции подразумевается множество всех действительных чисел x таких, при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл.

2) Табличный способ состоит в том, что функция задается в виде таблицы, содержащей значения аргумента x и соответствующие значения функции $f(x)$, например таблица логарифмов.

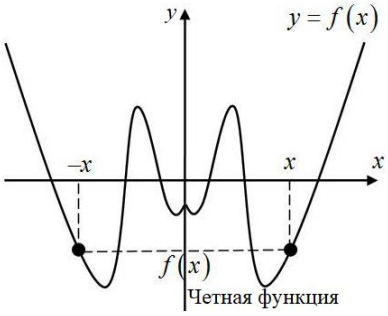
3) Графический способ. В этом случае соответствие между значениями аргумента x и функции y устанавливается с помощью заданного графика, по

которому для каждого значения аргумента x определяется значение функции y. Например ЭКГ у пациента, барограмма - график изменения атмосферного давления.

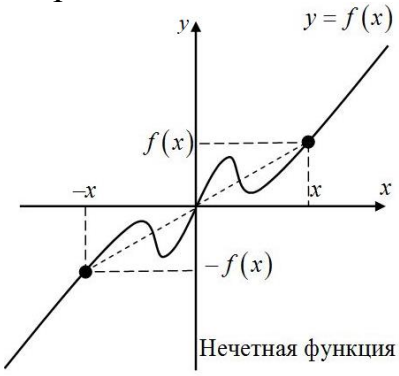
Графическое задание удобно тем, что по графику функции можно составить общее впечатлении о том, как протекает моделируемый процесс.

Основные свойства и виды функций

Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ с симметричной относительно нуля областью определения X называется четной, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Из определения четной функции следует, что ее график симметричен относительно оси ординат.



Функция $y = f(x)$ с симметричной относительно нуля областью определения X называется нечетной, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



Пример 1. Исследовать функцию на четность, нечетность $y = 3x^3 + x$.

Решение. Область определения $D(y) = (-\infty;+\infty) = R$ симметрична относительно начала координат.

$f(-x) = 3(-x)^3 + (-x) = -3x^3 - x = -(3x^3 + x) = -f(x)$, следовательно, данная функция нечетная.

Пример 2. Исследовать функцию на четность, нечетность $y = \dfrac{3x^3 + x}{x}$.

Решение. Область определения $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ симметрична относительно нуля,

$f(-x) = \dfrac{3(-x)^3 + (-x)}{-x} = \dfrac{-(3x^3 + x)}{-x} = \dfrac{3x^3 + x}{x} = f(x)$, следовательно, данная функция четная.

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Они называются функциями общего вида. Функцией общего является, например: $y = \sqrt{x}$ (область определения не симметрична относительно точки x=0).

Пример 3. Исследовать функцию на четность, нечетность $y = \dfrac{1}{x+1}$.

Решение. Область определения $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$ не симметрична относительно нуля, так как $x=-1\notin D(y)$, а $x=1\in D(y)$. Данная функция не является четной, не является нечетной. Это функция общего вида.

Монотонность. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей на промежутке X, если для любых двух значений $x_1,x_2\in X$ из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция $y=f(x)$ называется убывающей на промежутке X, если для любых двух значений $x_1,x_2\in X$, из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

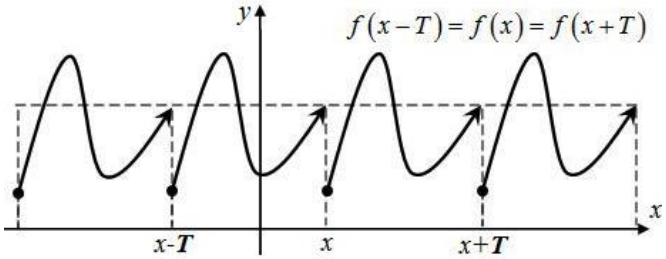
Периодичность. Функция $y=f(x)$ называется периодической с периодом $T\neq 0$, если для любых значений $x\in X$ выполнены условия:

1) $x\pm T\in X$;

2) $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$.

Наименьший период функции f называется основным периодом функции и обозначается T_0.

Для построения графика Т - периодической функции достаточно изобразить его на отрезке $[x,x+T]$, длина которого равна периоду Т (так называемая основная область), а затем построить периодическое продолжение, повторяя (смещая) график, нарисованный в основной области вправо и влево до бесконечности



Примерами периодических функций являются следующие (в скобках указаны их основные периоды):

1) $f(x)=C$ (С-константа, функция имеет любое положительное число своим периодом, основного периода - нет);

2) $f(x)=\cos x$ (основной период T_0 =2π);

3) $f(x)=\sin x$ (основной период T_0=2π);

4) $f(x)=tgx$ (основной период T_0=π);

5) $f(x)=ctgx$ (основной период T_0=π).

Ограниченность.

Функция $f(x)$ называется ограниченной снизу на множестве *X*, если существует число $m\in R$ такое, что при всех $x\in X$ выполняется неравенство $f(x)\geq m$. При этом число m называется нижней границей функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху на множестве *X*, если существует число $M\in R$ такое, что при всех $x\in X$ выполняется неравенство $f(x)\leq M$. При этом число M называется верхней границей функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве *X*, если она является ограниченной снизу и сверху. Для ограниченной функции на множестве *X* справедливо двойное неравенство $m\leq f(x)\leq M$.

Обычно в задачах в качестве множества X рассматривают **область определения** $D(f)$ или отрезок $[a, b]$.

Графически ограниченность снизу (сверху) функции $f(x)$ на множестве X означает, что график функции $y = f(x)$ на множестве X лежит полностью над (соответственно под) горизонтальной прямой, заданной уравнением $y = m$ $(y = M)$.

Например, функция $y = \sin x$ является ограниченной снизу $(m = -1)$ и сверху $(M = 1)$ на всей числовой оси; $y = x^3$ ограничена на любом промежутке конечной длины, но не ограничена на всей области определения $D(y) = R$.

Обратная функция. Пусть $y = f(x)$- функция, с областью определения X и с областью значений Y. Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ единственное $x \in X$, при котором $f(x) = y$. Тогда полученная функция $x = \varphi(y)$, определенная на промежутке Y с областью значений X, называется обратной.

Так как традиционно аргумент обозначают через x, а функцию через y, то функция, обратная к функции $y = f(x)$, примет вид $y = \varphi(x)$. Обратную функцию $y = \varphi(x)$ обозначают также в виде $y = f^{-1}(x)$.

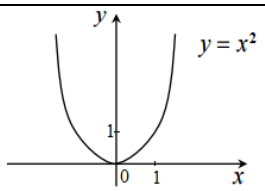
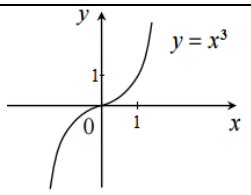
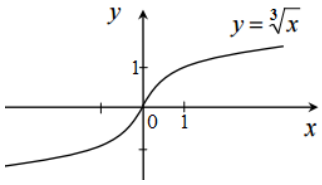
Например, для функции $y = e^x$ обратной будет $x = \ln y$ или в принятых обозначениях $y = \ln x$; $y = x^3$ обратная к $y = \sqrt[3]{x}$.

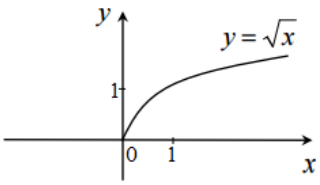
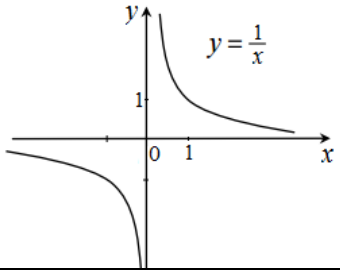
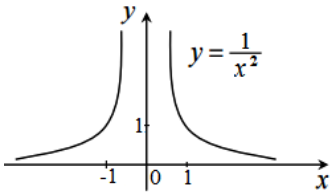
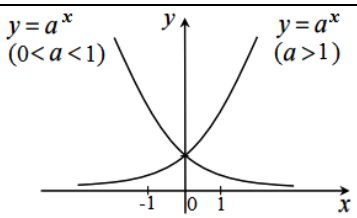
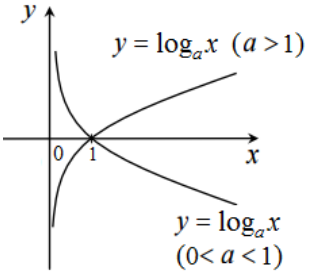
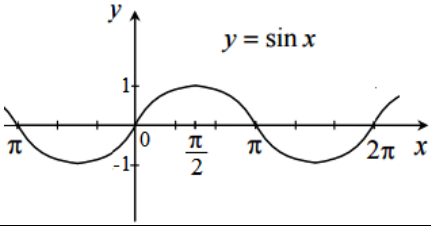
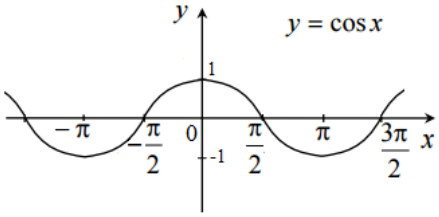
Основные элементарные функции

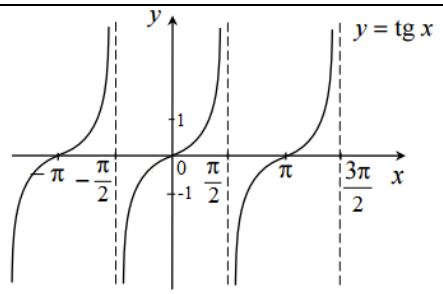
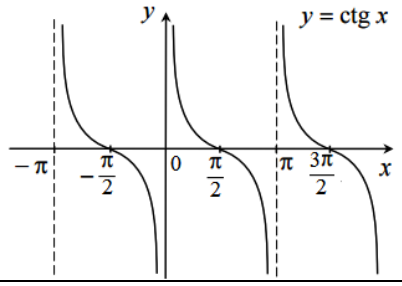
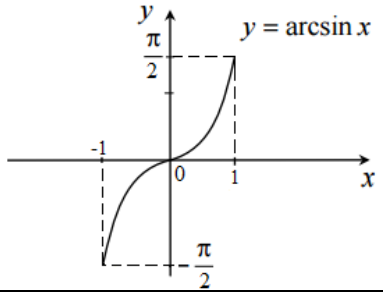
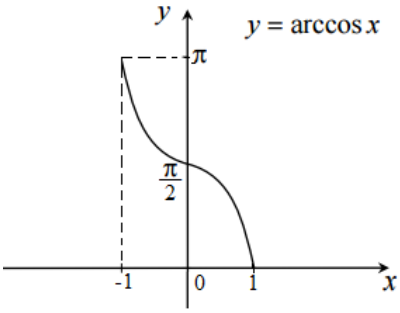
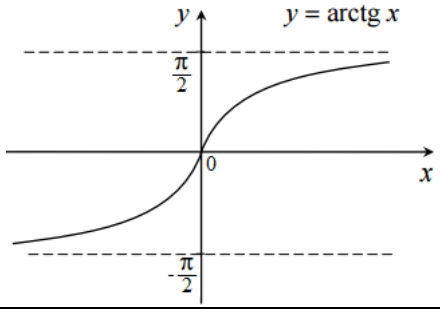
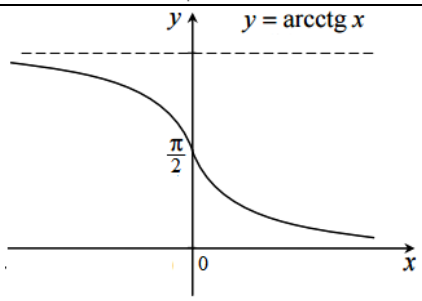
Среди всех функций можно указать наиболее простые, которые называются простейшими элементарными функциями. К ним относятся:

1) степенная функция: $y = x^\alpha$, где $\alpha \in R$;
2) показательная функция: $y = a^x$, где $x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$;
3) логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$;
4) тригонометрическая функция: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$;
5) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Графики элементарных функций

Степенная функция: $y = x^\alpha$, *где* $\alpha \in R$	
	$y = x^n$, $n \in N$, n - четное $D(y) = (-\infty, +\infty)$ $E(y) = [0, +\infty)$
	$y = x^n$, $n \in N$, n - нечетное $D(y) = (-\infty, +\infty)$ $E(y) = (-\infty, +\infty)$
	$y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n > 1$, n - нечетное $D(y) = (-\infty, +\infty)$ $E(y) = (-\infty, +\infty)$

	$y=\sqrt[n]{x},\ \ n\in N,\ n>1,\ n$ - четное $D(y)=[0,+\infty)$ $E(y)=[0,+\infty)$
	$y=x^{-n},\ \ n\in N,\ n$ - нечетное $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $E(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
	$y=x^{-n},\ \ n\in N,\ n$ - четное $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $E(y)=(0,+\infty)$
Показательная функция: $y=a^x$, где $x\in R,\ a>0,\ a\neq 1$	
	$D(y)=(-\infty,+\infty)$ $E(y)=(0,+\infty)$
Логарифмическая функция: $y=\log_a x,\ a\in R,\ a>0,\ a\neq 1$	
	$D(y)=(0,+\infty)$ $E(y)=(-\infty,+\infty)$
Тригонометрические функции: $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=tgx,\ y=ctgx$;	
	$y=\sin x$ $D(y)=(-\infty,+\infty)$ $E(y)=[-1,1]$
	$y=\cos x$ $D(y)=(-\infty,+\infty)$ $E(y)=[-1,1]$

	$y = tgx$ $D(y) = (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in Z$ $E(y) = (-\infty, +\infty)$
	$y = ctgx$ $D(y) = (\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$ $E(y) = (-\infty, +\infty)$
Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx, y = arcctgx$.	
	$y = \arcsin x$ $D(y) = [-1, 1]$ $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
	$y = \arccos x$ $D(y) = [-1, 1]$ $E(y) = [0; \pi]$
	$y = arctgx$ $D(y) = (-\infty, +\infty)$ $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
	$y = arcctgx$ $D(y) = (-\infty, +\infty)$ $E(y) = (0; \pi)$

Из основных элементарных функций новые функции могут быть получены двумя способами при помощи:

a) алгебраических действий (арифметических операций);

b) операций образования сложной функции.

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются **элементарными**.

Пример. Функция $y=\frac{\ln x}{x^4}+\sin x$ есть сумма двух функций $f_1(x)=\frac{\ln x}{x^4}$ и $f_2(x)=\sin x$. Первая функция $f_1(x)=\frac{\ln x}{x^4}$ есть частное двух основных элементарных функций $f_1(x)=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, $g_1(x)=\ln x,\ g_2(x)=x^4$. Вторая функция $f_2(x)=\sin x$ является основной элементарной функцией.

Сложная функция. Если y является функцией от u,то есть $y=f(u)$, а u, в свою очередь, функцией от x, то есть $u=\varphi(x)$, то $y=f(\varphi(x))$ является сложной функцией от x («композиция функций», «функция от функции»). Например, $y=\sqrt{x+3}$ - сложная функция, так как ее можно представить в виде $y=\sqrt{u}$, где $u=x+3$.

Математические утверждения можно формулировать с помощью кванторов существования $\exists$ (соответствует словам «имеется», «найдется») и всеобщности $\forall$ (соответствует словам «для любого», «для всех»), а также логических символов - знак логического следования $\Rightarrow$ (одно следует из другого), знак равносильности $\Leftrightarrow$.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ПРЕДЕЛ

Понятие числовой последовательности

Если каждому элементу n из множества натуральных чисел $N=\{1,2,3,\ldots,n\ldots\}$ поставлено в соответствие число a_n из множества R, то это соответствие называется числовой последовательностью. Другими словами, последовательностью (a_n) называется числовая функция натурального аргумента: $a_n=f(n)$.

Числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ называются членами последовательности, а число a_n - общим или $n-$ым членом последовательности. Последовательность, как правило, задается формулой общего члена

Примеры последовательностей:

1) $\left(\frac{1}{n}\right)$: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$. Здесь $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ \ldots$ - члены последовательности; $a_n=\frac{1}{n}$ - $n-$ый член последовательности.

2) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$: $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots$.

Характеристики последовательностей

Последовательность (a_n) называется **строго возрастающей**, если $a_{n+1}>a_n$ при всех номерах *n*.

Последовательность (a_n) называется **строго убывающей**, если $a_{n+1}<a_n$ при всех номерах *n*.

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются **строго монотонными последовательностями**.

Последовательность (a_n) называется **постоянной** (или **константой**), если $a_n = C$ при всех номерах n (C−некоторое действительное число).

Последовательность (a_n) называется **ограниченной сверху**, если можно найти действительное число M такое, что при всех номерах n справедливо неравенство $a_n \le M$.

Последовательность (a_n) называется **ограниченной снизу**, если можно найти действительное число m такое, что при всех номерах n справедливо неравенство $a_n \ge m$.

Последовательность (a_n) называется **ограниченной**, если существует число $M > 0$ такое, что при всех $n \in N$ выполняется условие: $|a_n| \le M$.

Предел последовательности

Прежде чем вводить определение предела последовательности, рассмотрим пример.

Пример. Определить, к какому числу при неограниченном возрастании номера n приближаются члены последовательности (a_n), заданной общим членом $a_n = 2 - \frac{1}{n^2}$

Решение. Напишем первые десять членов последовательности. Взяв последовательно номера n=1, 2, ... , 10, получаем

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{7}{4} = 1{,}75$, $a_3 = \frac{17}{9} = 1{,}8(8)$, $a_4 = \frac{31}{16} = 1{,}9375$, $a_5 = \frac{49}{25} = 1{,}96$, $a_6 = \frac{71}{36} = 1{,}972(2)$, $a_7 = \frac{97}{49} = 1{,}9796...$, $a_8 = \frac{123}{64} = 1{,}9844...$, $a_9 = \frac{161}{81} = 1{,}97876...$, $a_{10} = \frac{199}{100} = 1{,}99$.

Очевидно, что при неограниченном возрастании номера n члены последовательности приближаются к числу 2 . При этом число 2 называют пределом числовой последовательности (a_n).

Дадим точное определение предела числовой последовательности.

Число A называется **пределом последовательности** (a_n), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий от ε, $N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

При этом пишут $A = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Говорят, что последовательность (a_n) сходится к числу A.

Обозначение *lim* - сокращение от латинского слова limes - «предел» и равнозначного французского слова *limite*.

На языке кванторов определение предела последовательности можно сформулировать следующим образом: $A = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n > N : \ |a_n - A| < \varepsilon.$

Смысл предела A числовой последовательности (a_n) состоит в том, что при достаточно больших номерах n, члены последовательности a_n как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине меньше, чем на положительное число ε, каким бы малым оно ни было).

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, в противном случае расходящейся.

Пример 1. Последовательность (a_n), заданная общим членом $a_n = 2 + \frac{1}{n^3}$, сходится к числу $A = 2$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 + \frac{1}{n^3}\right) = 2$.

Пример 2. Последовательность (a_n), заданная общим членом $a_n = 7 - \frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^3}$ сходится к числу $A = 7$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(7 - \frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^3}\right) = 7$.

Пример 3. Последовательность $(\cos n)$ не имеет предела, так как $(\cos n) = (\cos 1, \cos 2, \cos 3, \cos 4, \cdots, \cos n, \cdots)$ не может стремиться ни к какому числу (в силу периодичности $\cos x$), и в силу ограниченности, не может стремиться к $+\infty, -\infty$ или ∞.

Свойство 1 (Единственность предела). Если у последовательности (a_n) существует предел, то только один.

Свойство 2 (Ограниченность сходящейся последовательности). Если последовательность (a_n) сходится, то она обязательно ограничена.

Сформулируем теоремы о действиях над сходящимися последовательностями, которые облегчают решение задачи на нахождение пределов. Во всех нижеследующих теоремах предполагается, что последовательности (a_n), (b_n) сходятся соответственно к числам A и B.

Теорема 1 (Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей).

Последовательность (c_n) с общим членом $c_n = a_n + b_n$ $(c_n = a_n - b_n)$ сходится, причем

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = A + B,$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = A - B$$

Краткая формулировка теоремы следующая: предел суммы (разности) равен сумме (разности) пределов.

Теорема 2 (Предел произведения двух сходящихся последовательностей). Последовательность (c_n) с общим членом $c_n = a_n \cdot b_n$ сходится, причем

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

Краткая формулировка теоремы следующая: предел произведения равен произведению пределов.

Теорема 3 (Вынесение постоянной за знак предела). Последовательность (c_n) с общим членом $k \cdot a_n$ сходится, причем

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot A.$$

Краткая формулировка теоремы следующая: постоянную k можно выносить за знак предела.

Теорема 4 (Предел отношения двух сходящихся последовательностей). Последовательность (c_n) с общим членом $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, где при всех n: $b_n \neq 0$ и $B \neq 0$ сходится, причем

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}.$$

Краткая формулировка теоремы: предел отношения двух сходящихся последовательностей равен отношению пределов.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Из всех сходящихся последовательностей важную роль играют так называемые бесконечно малые последовательности. Дадим точное определение.

Последовательность (α_n) называется **бесконечно малой**, если она сходится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Примерами бесконечно малых последовательностей являются $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ и т.д.

Приведем ряд простейших свойств бесконечно малых последовательностей.

Свойство 1. Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Свойство 2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность (в частности на постоянную последовательность) есть бесконечно малая последовательность.

Свойство 3. Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Последовательность (x_n) называется **бесконечно большой**, если ее предел равен $(\pm\infty)$ или ∞.

Примерами бесконечно больших последовательностей являются (n), $((-1)^n \cdot n)$, (3^n), (n^2) и т.д.

Пример. Пользуясь свойствами пределов последовательностей и бесконечно малых последовательностей, вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{3}{2^n}-\frac{1}{n}\cdot\cos n\right)$.

Решение. В нашем случае числовая последовательность (a_n) задается формулой общего члена $a_n = 3-\frac{3}{2^n}-\frac{1}{n}\cdot\cos n$.

Пользуясь свойствами пределов числовых последовательностей (в частности пределом константы), получим

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3-\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2^n}-\frac{1}{n}\cdot\cos n\right)=\lim_{n\to+\infty}3-3\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\cos n=3-3\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\cos n.$$

При этом

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (последовательность с общим членом $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ является бесконечно малой),

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\cos n = 0$ (последовательность с общим членом $\frac{1}{n}\cdot\cos n$ является бесконечно малой как произведение бесконечно малой и ограниченной).

В силу вышесказанного получим окончательно

$$\lim_{n\to+\infty}\left(3-\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2^n}-\frac{1}{n}\cdot\cos n\right)=3.$$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, быть может, за исключением самой точки x_0.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_o (или в точке x_0), если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_o| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

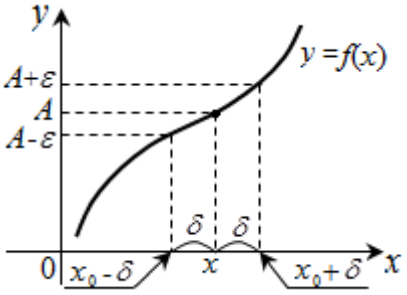
Этот предел обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

С помощью логических символов определение имеет вид:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \neq x_0 : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Смысл определения предела функции в точке x_o состоит в том, что для всех значений x, достаточно близких к x_o, соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A (естественно в тех точках x, в которых функция определена).

Рисунок дает геометрическую иллюстрацию определения.



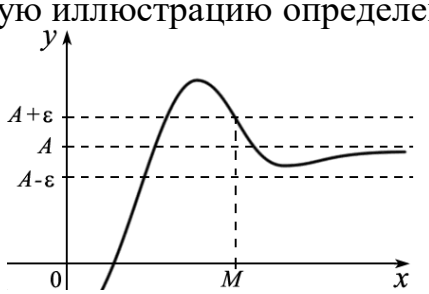
Число A называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to \infty$ (пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$), если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительного число $M > 0$ (зависящее от ε, $M = M(\varepsilon)$), что для всех x таких, что $|x| > M$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

С помощью логических символов определение имеет вид:

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M = M(\varepsilon) > 0 \ \forall x : \ |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Иначе говоря, число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для всех значений x, достаточно больших по абсолютной величине, соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A.

Рисунок дает геометрическую иллюстрацию определения.



Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, то график функции $f(x)$ при неограниченном возрастании $|x|$ приближается к прямой $y = A$.

Прямая $y = A$ в этом случае называется горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$.

Односторонние пределы

Пределом слева функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел функции при условии, что $x \to x_0$ и $x < x_0$, и обозначается $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$.

Пределом справа функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел функции при условии, что $x \to x_0$ и $x > x_0$, и обозначается $\lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

«Добавка» -0 символизирует бесконечно малое отрицательное число, а «добавка» +0 - бесконечно малое положительное число. Запись $x \to x_0 - 0$ обозначает, что мы подходим к числу x_0 с левой стороны. Запись $x \to x_0 + 0$ обозначает, что мы подходим к числу x_0 справа.

Замечание. Если $x_0 = 0$, то пишут просто $f(+0), f(-0)$. Обратите внимание на то, что $x_0 - 0$ и $x_0 + 0$ это всего лишь удобные обозначения и их не следует связывать с соответствующими арифметическими операциями.

Пределы слева и справа называются односторонними пределами.

Теорема. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, и эти пределы равны между собой.

Символически теорему можно записать так: $\left(\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x) = A\right)$.

Основные теоремы о пределах

Теорема. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то в некоторой окрестности точки x_o выполняется равенство $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ и c - константа, тогда

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c,$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B,$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B,$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}, \ B \neq 0,$
5. $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A,$
6. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^n = A^n, \ \lim\limits_{x \to x_0} x^n = (x_0)^n.$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

С помощью логических символов определение имеет вид:

$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \neq x_0 : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$

Далее приведем список часто используемых функций, являющихся бесконечно малыми.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^k} \ (k > 0)$ - бесконечно малая на ∞, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^k} = 0 \ \ (k > 0)$

2) $f(x)=a^x$ $(a>1)$ - бесконечно малая на $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ $(a>1)$

3) $f(x)=a^x$ $(0<a<1)$ - бесконечно малая на $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0\,(0<a<1)$

4) $f(x)=\sin x$ - бесконечно малая в точке $x_0=\pi k$ (k - целое число), $\lim\limits_{x\to\pi k}\sin x=0$.

Так, например, функция $f(x)=x^2$ является бесконечно малой при $x\to 0$, а функция $g(x)=x+1$ - бесконечно малой при $x\to -1$.

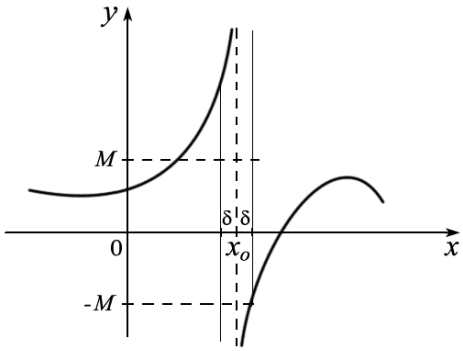
Приведем простейшие свойства бесконечно малых функций. Здесь предполагается, что каждая из рассматриваемых функций бесконечно малая в точке x_0 или на бесконечностях.

Свойство 1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций в точке есть бесконечно малая функция в точке.

Свойство 2. Произведение бесконечно малой функции в точке на ограниченную функцию (в достаточно малой окрестности точки) есть бесконечно малая функция в данной точке.

Свойство 3. Произведение конечного числа бесконечно малых функций в точке есть бесконечно малая функция в данной точке.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x\to x_0$, если ее предел равен бесконечности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $(\pm\infty)$.



Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to x_0$, если для любого числа $M>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_o|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)|>M$.

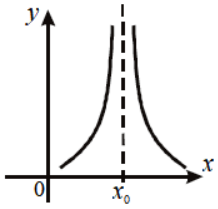
Данное определение может быть записано следующим образом:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x\neq x_0 : |x-x_o|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$.

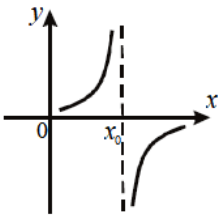
Говорят также, что функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to x_0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то график функции $f(x)$ при $x\to x_0$ асимптотически приближается к прямой $x=x_0$. Прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$.

График имеет один из следующих четырех вариантов

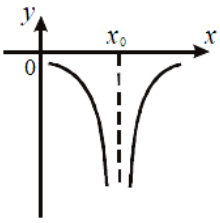


$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

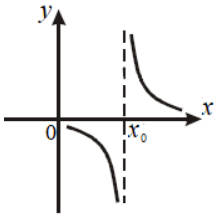


$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty$

Выражение $x\to x_0$ в данных определениях играет важную роль, так как одна и та же функция, но при разных значениях x_0 может быть бесконечно большой,

бесконечно малой или ни той, ни другой. Например, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$), а при $x\to 0$ является бесконечно большой ($\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$). Но $f(x)=\frac{1}{x}$ при $x\to 2$ не является ни той, ни другой, так как $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$.

Свойства бесконечно больших функций

1. Сумма бесконечно больших функций одного знака является бесконечно большой того же знака.

2. Произведение бесконечно большой функции при $x\to x_0$ и ограниченной функции есть бесконечно большая функция при $x\to x_0$.

3. Если функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая, и обратно, если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x\to x_0$, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая при $x\to x_0$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty \text{ (символическая запись } \left(\frac{1}{0}\right)=\infty\text{)},$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0 \text{ (символическая запись } \left(\frac{1}{\infty}\right)=0\text{)}.$$

Вычисление пределов. Простейшие приемы раскрытия неопределенностей

Если функция $y=f(x)$ является элементарной, то вычисление $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ сводится к простой подстановке предельного значения x_o вместо x, если x_o принадлежит области определения этой функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}(4x+5)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 3}(4x+5)=4\cdot\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}5=4\cdot 3+5=17.$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}(x^3-5x+3)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -2}(x^3-5x+3)=(-2)^3-5\cdot(-2)+3=-8+10+3=5.$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\frac{7x-8}{10x+1}$.

Решение. Так как пределы числителя и знаменателя существуют, и предел знаменателя отличен от нуля, то можно воспользоваться теоремой о пределе частного:

$$\lim_{x\to 4}\frac{7x-8}{10x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(7x-8)}{\lim\limits_{x\to 4}(10x+1)}=\frac{7\cdot 4-8}{10\cdot 4+1}=\frac{20}{41}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5x-8}{6x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5x-8}{6x-1}=\frac{2^2+5\cdot 2-8}{6\cdot 2-1}=\frac{6}{11}.$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos 2x}=\frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1+1}{1-(-1)}=\frac{2}{2}=1.$

Не всякий предел можно найти так просто. Иногда при вычислении пределов результат формальной подстановки в функцию предельного значения аргумента приводит к выражениям вида: $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, (1^{∞}), (0^{0}), (∞^{0}). В этих случаях говорят, что имеет место неопределенность. Термин «неопределенность» подчеркивает, что поведение данного выражения заранее предсказать невозможно, более того, в зависимости от конкретных функций пределы выражений одинаковой структуры могут быть конечным числом, бесконечностью или вовсе отсутствовать. В этом случае приходится использовать различные технические приемы в зависимости от вида функции и вида неопределенности. Найти предел означает раскрыть неопределенность.

Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Если выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой дробно-рациональную функцию, то для раскрытия неопределенности достаточно разложить числитель и знаменатель дроби на множители, произвести сокращение на $(x-x_0)$, а затем найти предел.

Для разложения на множители квадратного трехчлена используем формулу: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2- корни трехчлена, которые находятся по формуле $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, $D=b^2-4ac$.

В частных случаях для разложения на множители можно использовать другие методы (формулы сокращенного умножения, вынесение общего множителя за скобки и т.п.).

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{2x^2-3x-9}$.

Решение. Так как пределы числителя и знаменателя при $x\to 3$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Эту неопределенность можно раскрыть, разложив на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе и сократив далее на общий множитель $x-3$.

Для этого решим уравнения:

$x^2-7x+12=0$,

$x_1=3, x_2=4$,

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

$2x^2-3x-9=0$,

$D=9-4\cdot 2\cdot(-9)=81$, $x_1=3, x_2=-\frac{3}{2}$

$2x^2-3x-9=2(x-3)(x+\frac{3}{2})$

Подставим полученные разложения под знак предела и получим:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{2x^2-3x-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-4)}{2(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{2x+3}=\frac{3-4}{2\cdot 3+3}=-\frac{1}{9}.$$

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-9x+20}$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. В числителе будем использовать формулу разности кубов $x^3-64=(x-4)(x^2+4x+16)$, а в

знаменателе раскладываем квадратный трехчлен на множители (корни $x_1 = 4, x_2 = 5$): $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$. Теперь преобразуем выражение, стоящее под знаком предела

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-9x+20} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{x^3-4^3}{x^2-9x+20} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(x-4)(x-5)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x^2+4x+16}{x-5} = \lim_{x\to 4}\frac{4^2+4\cdot 4+16}{4-5} = \frac{48}{-1} = -48.$$

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

Решение. Непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $(x-1)$, который и обращает числитель и знаменатель в точке $x=1$ в ноль. Для этого поделим числитель и знаменатель дроби на разность $(x-1)$ «уголком».

$$\begin{array}{l|l} -x^3 \qquad\quad +x-2 & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & \overline{x^2+x+2} \\ -\quad x^2+x & \\ \quad \underline{x^2-x} & \\ \qquad -2x-2 & \\ \qquad \underline{2x-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} -x^3-x^2-x+1 & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & \overline{x^2-1} \\ -\quad -x+1 & \\ \quad \underline{-x+1} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Имеем: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+2}{x^2-1} = \left(\dfrac{4}{0}\right) = \infty.$

Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, в которой числитель или знаменатель дроби содержит иррациональность, надо перенести иррациональность из числителя в знаменатель (или из знаменателя в числитель), умножив числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение.

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{10-x}-\sqrt{x+6}}{x-2}$.

Решение. Здесь мы имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Знаменатель дроби является иррациональным выражением. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю и воспользуемся формулой разности квадратов $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{10-x}-\sqrt{x+6}}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{10-x}-\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{10-x-(x+6)}{(x-2)\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{-2x+4}{(x-2)\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{-2}{\sqrt{10-x}+\sqrt{x+6}} = \frac{-2}{\sqrt{8}+\sqrt{8}} = \frac{-2}{2\sqrt{8}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{2x-1}-3}$.

Решение. Умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, и раскладывая квадратный трехчлен на множители (корни $x_1 = 5$, $x_2 = -2$), получим:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x-10}{\sqrt{2x-1}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+2)(\sqrt{2x-1}+3)}{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+2)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-1-9}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+2)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-10}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+2)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+2)(\sqrt{2x-1}+3)}{2}=$$

$$=\frac{7\cdot(\sqrt{2\cdot 5-1}+3)}{2}=\frac{42}{2}=21.$$

Неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Рассмотрим дробно-рациональную функцию $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$- многочлены степени n и m, то есть $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$, $P(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0$.

Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень x, то есть, на x^s, где $s=\max\{n,m\}$, а затем перейдем к пределу.

Пример 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+10}{2x^2+3}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби - бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы раскрыть эту неопределенность поделим числитель и знаменатель на старшую степень переменной x в данной дроби, то есть на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+10}{2x^2+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{10}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}}{2+\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Пример 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{7x^5+8x+1}$.

Решение. Очевидно, что здесь имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Наивысшая степень x равна 5. Разделим числитель и знаменатель на x^5 и после сокращения применим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{7x^5+8x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{3}{x^5}}{\frac{7x^5}{x^5}+\frac{8x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}{7+\frac{8}{x^4}+\frac{1}{x^5}}=\frac{0}{7}=0.$$

Пример 13. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2+1}{x^2+2x-1}$.

Решение. Очевидно, что здесь имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Наивысшая степень x равна 4. Разделим числитель и знаменатель на x^4 и после

сокращения применим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2+1}{x^2+2x-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}+\frac{2x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty.$$

Сравнивая результаты трех примеров, нетрудно понять, что значение пределов зависит от степени многочленов числителя и знаменателя. В общем виде правило можно записать следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, \text{если} n=m\\ 0, \text{ если} n<m\\ \infty, \text{ если} n>m\end{cases}.$$

В простейших случаях будем пользоваться этими выводами.

Неопределенность вида $(\infty-\infty)$

Различными преобразованиями превращаем данную разность бесконечно больших функций в отношение бесконечно больших или бесконечно малых функций.

Пример 14. Найти предел $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to3}\frac{x+3-6}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$

Пример 15. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$.

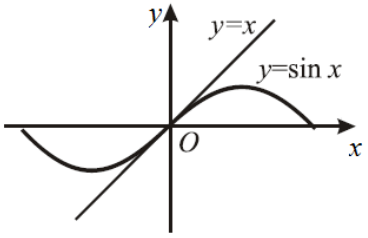
Решение. Чтобы найти предел, то есть раскрыть неопределенность $(\infty-\infty)$, необходимо умножить и разделить на сопряженное выражение (чтобы затем по формуле разности квадратов избавиться от квадратного корня):

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+5x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+5x}+x)}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x-x^2}{\sqrt{x^2+5x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}.$$

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Первый замечательный предел



$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Данный предел позволяет сделать вывод о том, что чем меньше x отличается от нуля, тем меньше отличие ординат функций $y=\sin x$ и $y=x$, а при $x=0$ их значения совпадают.

Первый замечательный предел можно обобщить на случай, когда аргументом тригонометрической функции является бесконечно малая функция: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$

Первый замечательный предел раскрывает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Его используют в тех случаях, когда выражение, стоящее под знаком предела содержит тригонометрические функции.

Второй замечательный предел

Рассмотрим числовую последовательность вида $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1,\ 2,\ldots.$

Члены этой последовательности представлены в таблице 1.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000
x_n	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,59	2,70	2,717	2,718

Из таблицы видно, что члены последовательности возрастают, рост их замедляется, и они не превосходят числа 3. Доказано, что последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1,\ 2,\ldots$ монотонная и ограниченная, а значит, имеет предел.

Числом e называется предел $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Это число иррациональное и с точностью до шестой значащей цифры равно $e=2{,}71828$.

Символ e для обозначения этого числа был введен в 1731 году Эйлером. Число e играет важную роль в математическом анализе и фигурирует во многих формулах и задачах. Показательная функция $y=e^x$ с основанием е называется экспонентой, а логарифмическая функция по снованию e – натуральным логарифмом: $y=\log_e x=\ln x$.

Можно показать, что к числу e стремится и функция действительного аргумента $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$.

Вторым замечательным пределом называется предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Второй замечательный предел можно записать и в другом виде, заменив $\alpha=\frac{1}{x}$. Тогда $x=\frac{1}{\alpha}$, причем при $x\to\infty$ величина $\alpha\to 0$.

Итак, $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

Второй замечательный предел раскрывает неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$ и применяется при нахождении пределов показательно-степенных функций.

С помощью замечательных пределов расширяется возможность вычислять пределы функций.

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{8x}$.

Решение. Необходимо данную функцию преобразовать так, чтобы можно было применить первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{8x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3}{3x\cdot 8}=\frac{3}{8}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{3}{8}.$$

Пример 17. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{5x^2}$.

Решение. Используя формулу понижения степени $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, преобразуем числитель дроби, затем сведем предел к первому замечательному пределу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{5x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}.$$

Пример 18. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sqrt{x+9}-3}$.

Решение. В знаменателе стоит выражение, содержащее иррациональность, домножаем его (и числитель) на сопряженное выражение, тогда в знаменателе получаем формулу разности квадратов. Затем применяя первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sqrt{x+9}-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cdot(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cdot(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cdot(\sqrt{x+9}+3)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cdot(\sqrt{x+9}+3)\cdot 7}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7\cdot\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+9}+3)=$$

$$=1\cdot 7\cdot(3+3)=42.$$

Пример 19. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида (1^∞). Преобразуем функцию так, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$, или следствием $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+1}=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3}{x}\cdot(x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(x+1)}{x}}=\left|\lim_{x\to\infty}\frac{3(x+1)}{x}=3\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=3\right|=e^3.$$

Пример 20. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+5x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Преобразуем функцию так, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+5x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+5x^2\right)^{\frac{1}{5x^2}}\right)^5=e^5.$$

Пример 21. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение. Преобразуем функцию так, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{3}{x}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+(-7x)\right)^{\frac{1}{-7x}}\right)^{-7\cdot 3}=e^{-21}.$$

Пример 22. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{3x}{x-2}}$.

Решение. Преобразуем функцию так, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{3x}{x-2}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to 2}(1+4x-7-1)^{\frac{3x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}(1+4x-8)^{\frac{3x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}(1+4(x-2))^{\frac{3x}{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\left(1+4(x-2)\right)^{\frac{1}{4(x-2)}}\right)^{3x\cdot 4}==\lim_{x\to 2}\left(\left(1+4(x-2)\right)^{\frac{1}{4(x-2)}}\right)^{12x}=e^{\lim\limits_{x\to 2}12x}=e^{24}.$$

Пример 23. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{x}$.

Решение. Преобразуем функцию так, чтобы воспользоваться вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{x}=\left|\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{3+\frac{4}{x}}=\frac{3}{3}=1\right|=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1}{3x+4}-1\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1-3x-4}{3x+4}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+4}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{3x+4}\right)^{\frac{3x+4}{-3}}\right)^{\frac{-3\cdot x}{3x+4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x}{3x+4}}=$$

$$=\left|\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{3+\frac{4}{x}}=\frac{-3}{3}=-1\right|=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$;
2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-7x-15}{x^2-3x-10}$;
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-12x+20}$;
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$;
6. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3+2x+12}$;
7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-8}$;
8. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$;
9. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{6x^2+13x+2}{3x^2+8x+4}$;
10. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^3-3x+2}$;
11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$;
12. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2+15x+25}{x^2+4x-5}$;

13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$;

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$;

15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^2+12x+11}$;

16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$;

17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4+3x^3-5x^2-27x-36}{x^3-5x^2+5x+3}$;

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

20. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$;

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7x+2}-4}{x-2}$;

22. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x+4}-1}{x^2+5x+4}$;

23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{12-x}-3}{x^2-4x+3}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}$;

25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$;

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5x-9}-4}{x^2-4x-5}$;

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;

28. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-2x+9}}{x^2-3x+2}$;

29. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+9}}{x+2}$;

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{2x^2-7x+5}$;

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

32. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-2x^2+3}{7x^4+8x^3+1}$;

33. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-5x+8}{x+100}$;

34. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+3x^2-10x+2}{7x^3+x+1}$;

35. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2x+3}{7x^3+8x+1}$;

36. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2-5x+4}{3x^2+7x+1}$;

37. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5+2x+3}{7x^3+8x-2}$;

38. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+2}{8x+1}$;

39. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^5+5x+4}{x^6+7x^4+1}$;

40. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

41. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$;

42. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$;

43. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$

44. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right)$;

45. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$;

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$;

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 3x}$;

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$;

49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x}$;

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{x}$;

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg x}{\sin 3x}$;

52. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-1}$;

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+9}-3}$;

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+4}-2}{\sin 7x}$;

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{\sin 5x}$;

57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x\cdot\sin 4x}$;

59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\sin 5x}{1-\cos 10x}$;

60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$;

61. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-8x+15}$;

62. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg 5x$;

63. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg\dfrac{x}{3}$;

64. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$;

65. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$;

66. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}$;

67. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{4}{x^2}}$;

68. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{7x}}$;

69. $\lim\limits_{x\to 0}(1+15x^3)^{\frac{2}{x^3}}$;

70. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$;

71. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^5}\right)^{x^5}$;

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)^{2x}$;

73. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{x}$;

74. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$;

75. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x^3}\right)^{2x^3}$;

76. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{1}{x-2}}$;

77. $\lim\limits_{x\to 1}(10x-9)^{\frac{1}{x-1}}$;

78. $\lim\limits_{x\to -1}(3x+4)^{\frac{5}{x+1}}$;

79. $\lim\limits_{x\to 3}(5x-14)^{\frac{2x}{x-3}}$;

80. $\lim\limits_{x\to -3}(4x+13)^{\frac{1}{x^2-9}}$;

81. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-7x+11)^{\frac{1}{x-2}}$;

82. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$;

83. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+1}$;

84. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{3x}$;

85. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x-5}\right)^{x+1}$;

86. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$;

87. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$;

Ответы:

1.	2. -2;	3. $\frac{13}{7}$;	4. $\frac{1}{4}$;	5. $\frac{5}{3}$;	6. $\frac{1}{14}$;	7. $\frac{5}{12}$;	8. $\frac{4}{5}$;	9. $\frac{11}{4}$;	10. -8;
11. $\frac{3}{4}$;	12. $\frac{5}{6}$;	13. 3;	14. $\frac{1}{2}$;	15. $\frac{1}{10}$;	16. $\frac{15}{11}$;	17. 66;	18. $-\frac{1}{2}$;	19. $\frac{1}{2}$;	20. 40;
21. $\frac{7}{8}$;	22. $\frac{1}{2}$	23. $-\frac{1}{12}$	24. -8;	25. $\frac{1}{18}$;	26. $\frac{5}{48}$;	27. $\frac{2}{3}$;	28. $\frac{1}{2}$;	29. $-\frac{\sqrt{7}}{7}$;	30. $\frac{7}{18}$;
31. 4;	32. $\frac{1}{7}$;	33. ∞;	34. $\frac{2}{7}$;	35.0;	36.2;	37. ∞;	38. ∞;	39.0;	40.1;
41.1;	42. $\frac{2}{9}$;	43. $\frac{1}{2}$;	44.0;	45.-3;	46.7;	47. $\frac{2}{3}$;	48. $\frac{4}{5}$;	49. $\frac{1}{6}$;	50.2;
51. $\frac{1}{3}$;	52. $\frac{1}{3}$;	53.6;	54. $6\sqrt{2}$;	55. $\frac{5}{28}$;	56. $\frac{1}{15}$;	57. $\frac{1}{2}$;	58.8;	59. $\frac{3}{10}$;	60. $\frac{9}{2}$;
61. $-\frac{1}{2}$;	62. $\frac{1}{5}$;	63.3;	64.1;	65. e^5;	66. e^{-2};	67. e^{12};	68. $e^{\frac{12}{7}}$;	69. e^{15};	70. e^2;

71. e^{-3}; 72. e^{10}; 73. $e^{\frac{1}{5}}$; 74. $e^{\frac{1}{2}}$; 75. $e^{\frac{10}{3}}$; 76. e^{2}; 77. e^{10}; 78. e^{15}; 79. e^{30}; 80. $e^{-\frac{2}{3}}$;

81. e^{-3}; 82. e^{-2}; 83. e^{4}; 84. e^{-15}; 85. $e^{\frac{11}{2}}$; 86. e^{4}; 87. e^{15}.

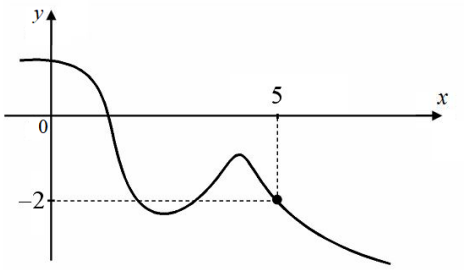
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции $f(x)$ в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (1).

Равенство (1) означает выполнение трех условий:

1. функция $f(x)$ определена в точке x_0 (то есть $\exists f(x_0)$);
2. существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3. этот предел равен значению функции в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пример. Показать, что функция, изображенная на рисунке, непрерывна в точке $x_0 = 5$.



Решение. Как видно из рисунка, функция $f(x)$ определена в точке $x_0 = 5$, причем $f(x_0) = f(5) = -2$. Далее функция $f(x)$ в точке $x_0 = 5$ имеет предел $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -2$. Значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 5$.

Для исследования функции на непрерывность в точке часто пользуются критерием непрерывности: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в этой точке и существуют пределы справа и слева при $x \to x_0$, причем выполняется равенство: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на интервале (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на интервале (a,b), а также непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b (то есть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x\to b+0} f(x) = f(b)$).

Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Точка x_0, в которой функция не является непрерывной, называется точкой разрыва этой функции.

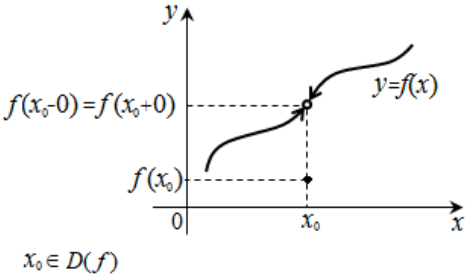
В точке разрыва будет нарушено хотя бы одно из условий определения непрерывности функции в точке.

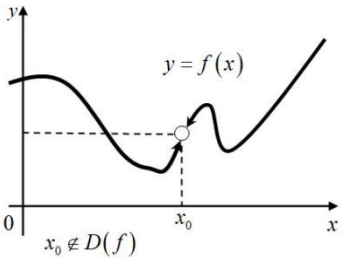
<u>Замечание.</u> Для дробно-рациональной функции вида $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ где $h(x), g(x)$ - многочлены относительно переменной x, точками разрыва являются те точки, в которых знаменатель $g(x)$ обращается в нуль, то есть точка x_0 разрыва удовлетворяет условию $g(x_0) = 0$.

Классификация точек разрыва функции

1) Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва, если в этой точке существуют конечные и равные между собой пределы справа и слева, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Но при этом значение функции в точке x_0 либо не определено, либо не равно указанным односторонним пределам.

Этот разрыв можно устранить, изменив значение функции всего в одной точке, а именно, полагая $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, и получить непрерывную функцию. Но это будет уже другая функция, которая будет отличаться от функции $f(x)$ всего в одной точке (при $x = x_0$).

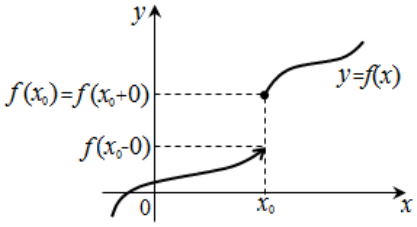




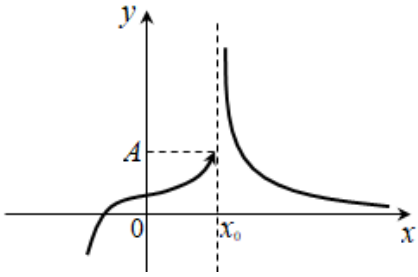
2) Точка x_0 называется точкой разрыва I рода с конечным скачком, если в этой точке существуют конечные пределы справа и слева $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, причем $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$.

Значение функции $f(x_0)$ в данном случае может существовать или не существовать.

Величина $|f(x_0+0) - f(x_0-0)|$ – это *скачок* функции в точке x_0.

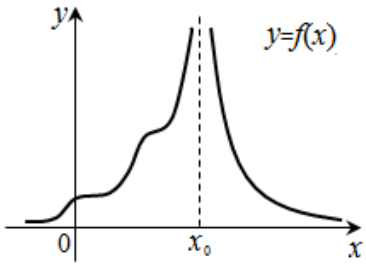


3) Точка x_o называется точкой разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.



$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$

Чаще всего разрыв возникает по двум причинам:

– функция задана различными выражениями на разных участках, и в граничных точках эти выражения имеют различные пределы;

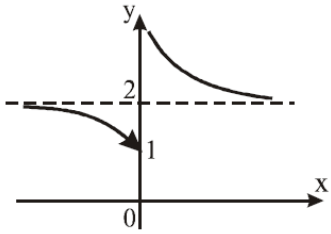
– функция не определена в данной точке.

Пример 1. Исследовать непрерывность функции $f(x)=1+2^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Функция не определена в точке $x=0$, значит, в этой точке функция терпит разрыв. Покажем, что это разрыв II -го рода. Найдем пределы справа и слева в точке $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to-\infty,\ 2^{\frac{1}{x}}\to 0\\ x\to 0-0\end{array}\right|=1;$$

$$\lim_{x\to 0+0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}\to+\infty,\ 2^{\frac{1}{x}}\to+\infty\\ x\to 0+0\end{array}\right|=+\infty.$$



Так как предел справа равен бесконечности, то $x=0-$ точка разрыва II-го рода.

Пример 2. Задана функция $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0\\ 2x-1, & 0<x<2\\ 5-x, & x\ge 2\end{cases}$. Найти точки разрыва функции, если они существуют, и построить график функции.

Решение. В интервалах $(-\infty,0),(0,2)$ и $(2,+\infty)$ функция непрерывна. Исследуем функцию на непрерывность в точках перехода из одного аналитического выражения в другое, то есть в точках $x_1=0$ и $x_2=2$.

1. Исследуем точку $x_1=0$:

$f(x_1)=f(0)=0,$

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} x^2=1,$

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(2x-1)=-1,$

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)\Rightarrow x_1=0$ - точка разрыва I рода с конечным скачком.

2. Исследуем точку $x_2=2$:

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} 2x-1=3,$

$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(5-x)=3,\ f(2)=5-2=3.$

Так как $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=f(2)=3$, то в точке $x_2=2$ функция является непрерывной.

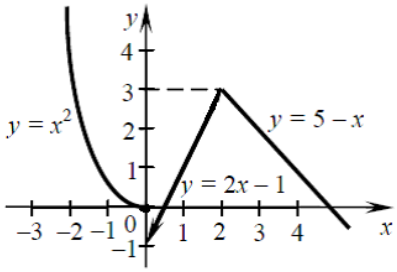


График исследуемой функции представлен на рисунке.

Пример 3. Задана функция $f(x)=\begin{cases}x+3, & x<0\\ x^3+3, & 0\le x<1\\ 3-x, & x\ge 1\end{cases}$. Исследовать функцию на непрерывность, определить точки разрыва, если таковые имеются, и установить характер разрыва.

Решение. Функция $f(x)$ задана различными аналитическими выражениями на промежутках $(-\infty,0),[0,1)$ и $[1,+\infty)$. На каждом интервале $(-\infty,0),(0,1)$ и $(1,+\infty)$ данная функция непрерывна, но в точках перехода из одного аналитического выражения в другое (при $x_1=0, x_2=1$) условия непрерывности могут нарушиться. Для исследования точек x_1, x_2 на разрыв используем критерий непрерывности.

1. Исследуем точку $x_1=0$.

В точке $x_1 = 0$ функция определена и $f(0) = (x^3 + 3)\big|_{x=0} = 3.$

Найдем пределы справа и слева в этой точке:

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} (x+3) = 3,$

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} (x^3+3) = 3.$

Получили, что пределы справа и слева равны между собой и равны значению функции в точке $x_1 = 0$, следовательно, в этой точке функция непрерывна.

2. Исследуем точку $x_2 = 1$.

В точке $x_2 = 1$ функция определена и $f(1) = (3-x)\big|_{x=1} = 2.$

Найдем пределы справа и слева в этой точке:

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (x^3+3) = 4,$

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} (3-x) = 2.$

Получили, что пределы справа и слева существуют и конечны, но не равны между собой, следовательно, в точке $x_2 = 1$ функция терпит разрыв I -го рода.

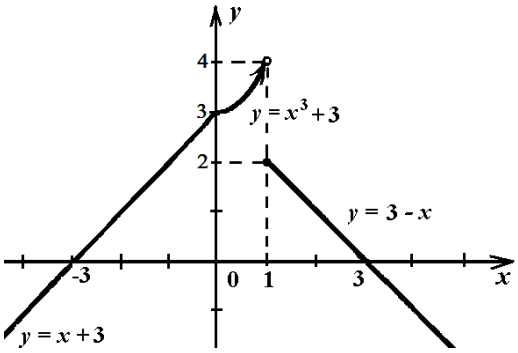


График исследуемой функции представлен на рисунке.

Задачи для самостоятельного решения

Найти точки разрыва функции $f(x)$, если они существуют, и указать их характер.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$;
2. $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$;
3. $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$;
4. $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$;
5. $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$;
6. $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$;
7. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$;
8. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ (x-1)^2, & 0 \le x \le 2; \\ -x+4, & x>2 \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x<-2 \\ x-1, & -2 \le x < 1; \\ \ln x, & x \ge 1 \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} x+4, & x \le -1 \\ x^2+2, & -1 < x \le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$.

Ответы:

1. $x = 1$ - точка разрыва второго рода;
2. $x = -1$ - точка разрыва второго рода;
3. $x = 0$ - точка разрыва второго рода;
4. $x = 2$ - точка разрыва второго рода;
5. $x = 2$ - точка разрыва первого рода;
6. $x = 1$ - точка разрыва первого рода;
7. $x = 1$ -точка устранимого разрыва;
8. $x = 2$ - точка разрыва первого рода;
9. $x = -2$ - точка разрыва первого рода;
10. $x = 1$ - точка разрыва первого рода.

Список используемой литературы

1. Богомолов Н.В Практические занятия по математике. – 11-е изд., пер. и доп.: учеб. пособие для СПО. – М.: Издательство Юрайт, 2015.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. – 5-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2014.
3. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н. Ш. Кремер; под ред. Н. Ш. Кремера. — 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2014.
4. Григорьев В.П. Элементы высшей математики. –М.: ОИЦ «Академия», 2016.
5. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для студентов учрежд. СПО / В.П.Григорьев, Т.Н.Сабурова. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.
6. Демидович Б.П. (ред.). Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов. – М.: АСТ, 2001. 495с.
7. Журбенко Л.Н., Никонова Г.А. и др. Математика в примерах и задачах. М.: ИНФРА-М, 2016.
8. Математика для экономистов и менеджеров. Практикум: учебное пособие/ коллектив авторов; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: КНОРУС, 2017.
9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2016.
10. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс: учебник. – 2-е изд. – М.: Издательство Юрайт, 2016.

Учебное издание
Ивина Н.А.
Учебное пособие
Лицензия № 27-1312 от 24.01.2013
Подписано в печать ___.___._____ г.
Формат А5, ____ с.
Тираж ____ экземпляров. Заказ № ____
Бумага для офсетной печати
Отпечатано на ризографе
Рязанский технологический колледж
390035 г. Рязань, пр. Гоголя, 6